

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2 א'

סמסטר ב', תשפ"ה, מועד א'

27 באוגוסט, 2025

מרצים: יעקב יעקובוב ויעל קרשון

- משך הבחינה 3 שעות.
- בבחינה 4 שאלות, בכל אחת תוכלו לקבל עד 27 נקודות. הניקוד המירבי בבחינה הוא 100 נקודות.
- אנא רשמו את הפתרונות במקום המיועד להם בטופס הבחינה. ניתן לרשום "המשך בעמ'.." ולהמשיך בעמודים שבסוף הבחינה: השתמשו בעמוד נפרד לכל שאלה, וסמנו את מספר השאלה בראש העמוד.
- ניתן לבקש מחברת נפרדת לטיוטה; מחברת זו לא תיבדק.
- אנא נסחו כל טענה שעליה אתם מסתמכים.
- כתיבה לא ברורה או לא רלוונטית עשויה להביא להורדת ניקוד.
- בכל שאלה או סעיף, התגובה "אינני יודעת" (ללא תוספת) תזכה אתכם ב- 20% מערך השאלה או הסעיף.
- בכל שאלה, בכל סעיף מותר להשתמש בתוצאות שהתבקשתם להוכיח בסעיפים הקודמים, גם אם לא פתרתם את הסעיפים הקודמים.
- אסורה החזקת טלפון סלולרי או כל מכשיר אלקטרוני אחר במהלך הבחינה. אין להשתמש במחשבון או בכל חומר עזר שהוא, פרט לדף הנוסחאות המצורף.

בהצלחה!

שאלה 1:

(א) (12 נקודות). מוצאו את $\int f(x)dx$ כאשר $f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ נתונה ע"י $f(x) = \frac{1}{1 + \sin x}$.
(ההצבה $t = \tan \frac{x}{2}$ מועילה בשאלות רבות מסוג זה.)

(ב) (15 נקודות). תהי $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה מונוטונית עולה ממש המקיימת $f(0) = 0$ ו-
 $f(1) = 1$. הוכיחו: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 (f(x))^n dx = 0$.

פתרון שאלה 1:

המשך פתרון שאלה 1:

שאלה 2:

תהי $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית על כל תת-קטע סגור $[a, b]$ של $[0, \infty)$.
אמת או שקר? נמקו:

(א) (13 נקודות). "אם האינטגרל $\int_0^\infty f(x)dx$ מתכנס בהחלט, אז בהכרח קיימת סדרה $x_n \rightarrow \infty$ כך ש- $x_n f(x_n) \rightarrow 0$ ".

(ב) (14 נקודות). "אם האינטגרל $\int_0^\infty f(x)dx$ מתכנס, אז בהכרח קיימת סדרה $x_n \rightarrow \infty$ כך ש- $x_n f(x_n) \rightarrow 0$ ".

פתרון שאלה 2:

המשך פתרון שאלה 2:

שאלה 3:

יהי α מספר אי-רציונלי. בכל אחד מהמקרים הבאים, הוכיחו כי, לכל $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(x + n\alpha\pi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt.$$

(א) (10 נקודות). $f(x) = e^{ikx}$, כאשר $k \in \mathbb{Z}$.

(ב) (7 נקודות). f פולינום טריגונומטרי, כלומר, $f(x) = \sum_{k=-m}^m a_k e^{ikx}$, כאשר $m \in \mathbb{N}$ ו- $a_k \in \mathbb{C}$.

(ג) (10 נקודות). $f \in C(\mathbb{T})$, כלומר, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, רציפה ומקיימת $f(x+2\pi) = f(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

פתרון שאלה 3:

המשך פתרון שאלה 3:

שאלה 4:

יהי (X, d) מרחב מטרי. תת קבוצה A של X היא קומפקטית אם ורק אם, לכל אוסף $\{U_i\}_{i \in I}$ של תתי קבוצות פתוחות של X כך ש- $A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$, קיים תת אוסף סופי $\{U_{i_1}, \dots, U_{i_n}\}$ כך ש- $A \subseteq U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$. (אין צורך להוכיח זאת).

(א) (12 נקודות). תהי סדרה ב- X שמתכנסת לגבול c . הוכיחו שתת-הקבוצה $\{c\} \cup \{x_n\}_{n=1}^\infty$ של X היא קומפקטית.

(ב) (15 נקודות). נניח שכל תת-קבוצה קומפקטית של X היא סופית. הוכיחו ש- X הוא דיסקרטי (כלומר, כל תת-קבוצה של X היא פתוחה).

פתרון שאלה 4:

המשך פתרון שאלה 4:

המשך פתרון שאלה _____:

המשך פתרון שאלה _____:

המשך פתרון שאלה _____:

המשך פתרון שאלה _____:

המשך פתרון שאלה _____: